MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 2
30.10.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt"

1. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = y \cdot (x - z)^2.$$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x, y, z)$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess} f(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

   c) Zeigen Sie, daß $\operatorname{Hess} f(x, y, z)$ in den kritischen Punkten weder positiv definit, noch negativ definit, und auch nicht indefinit ist.

2. a) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Zeigen Sie

$$A \text{ positiv definit} \quad \Longleftrightarrow \quad \det A > 0 \ \wedge \ \operatorname{Spur} A > 0.$$

   b) Zeigen Sie, daß für symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in a) nur „$\Longrightarrow$" gilt und die Richtung „$\Longleftarrow$" i.a. falsch ist.

3. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2\, x\, y\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

   Zeigen Sie, daß f im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist und daß $(0, 0)$ ein kritischer Punkt von f ist. Skizzieren Sie die Bereiche des $\mathbb{R}^2$, in denen f positive bzw. negative Funktionswerte annimmt. Besitzt f im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Extremum?

4. *(Frühjahr 2018, Thema 2, Aufgabe 4)*
   Auf der offenen Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$$

   werde die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = x + \frac{4}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3}$$

   definiert.
   Untersuchen Sie f auf lokale Extremstellen und geben Sie ggf. die Art des Extremums an.

Abgabe bis 6.11.2019, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).